

XII Certamen de Matemáticas Al-Bayat

Segundo Ciclo

17 de Abril de 2010

Problema 1.

¿Qué número era ese? No me acuerdo, pero te puedo decir es diecinueve más que un cuadrado perfecto y también dieciocho menos que otro cuadrado perfecto. ¿Qué número es?

Problema 2.

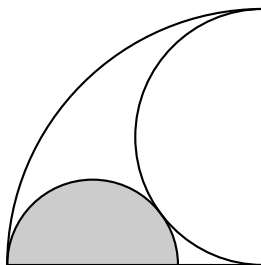
Alicia, Beatriz, y Carolina tienen el cumpleaños el mismo día. La edad actual de Alicia es dos años menos que la suma de las de Beatriz y Carolina. Dentro de cinco años, Alicia tendrá el doble de años que Beatriz. Hace dos años, Beatriz tenía la mitad de años que Carolina. ¿Qué edad tiene cada una ahora?

Problema 3.

Un estudiante perdió un décimo de la Lotería, y no se acordaba del número; pero sí recordó que era de cuatro cifras, divisible por 5, 9 y 11, y que la primera y última cifra eran iguales. ¿Cuál era el número?

Problema 4.

El diámetro del semicírculo grande y el radio del cuadrante miden ambos 2 cm. ¿Cuál es, en cm, el radio del semicírculo pequeño?

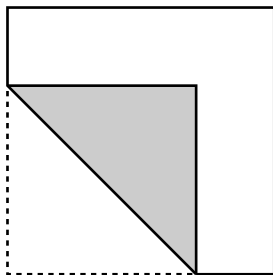


Problema 5.

Mientras Alberto hacía un examen miró el reloj y vio que el tiempo que había pasado era cinco veces el tiempo que le quedaba. Después de m minutos esta relación era de ocho veces. ¿Cuál era la relación pasados otros m minutos?

Problema 6.

Una hoja cuadrada de papel de 12 cm^2 de área, es blanca por un lado y gris por el otro. Doblamos una esquina de la hoja formando un triángulo con dos lados paralelos a los lados de la hoja, como se muestra en la figura. Si ahora la superficie visible de la hoja es la mitad blanca y la mitad gris, ¿Cuál es, en cm, la longitud de la doblez?



Soluciones

1. Según el enunciado, si x es el número buscado será $x = m^2 + 19$ y $x = n^2 - 18$ para ciertos números enteros n y m . Entonces $m^2 = x - 19$ y $n^2 = x + 18$, de donde, restando, $n^2 - m^2 = 37$, es decir $(n+m)(n-m) = 37$, y esto sólo puede ocurrir si $n+m = 37$ y $n-m = 1$, por tanto $n = 19$, $m = 18$, y el número buscado es $x = 18^2 + 19 = 324 + 19 = 343$.

2. Llamamos y y z a las edades de Beatriz y Carolina. Entonces, podemos expresar los datos del enunciado en la siguiente tabla:

	Alicia	Beatriz	Carolina
Ahora	$y + z - 2$	y	z
+5 años	$y + z + 3$	$y + 5$	$z + 5$
-4 años	$y + z - 4$	$y - 2$	$z - 2$

y plantear el sistema

$$\begin{cases} y + z + 3 = 2(y + 5) = 2y + 10 \\ z - 2 = 2(y - 2) = 2y - 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y + z = 7 \\ -2y + z = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 9 \\ z = 16 \end{cases}.$$

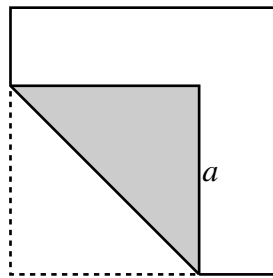
Por tanto las edades de Alicia, Beatriz y Carolina son 23, 9 y 16 años, respectivamente.

3. Por ser iguales la primera y última cifra, el número es de la forma $ABCA$. Para que el número sea divisible por 5, debe ser $A = 0$ o $A = 5$, pero $A = 0$ queda descartado, ya que entonces el número no sería de cuatro cifras. Entonces tenemos el número $5BC5$, que debe ser múltiplo de 11, por lo que $B - C$ debe ser múltiplo de 11. Esto exige que $B = C$. Ya tenemos el número $5BB5$, que debe ser múltiplo de 9, por lo que $2B + 10$ debe ser múltiplo de 9, y teniendo en cuenta que $2B + 10$ es par, sólo puede ser $2B + 10 = 18 \Rightarrow B = 4$. Por tanto el número buscado es 5445.

4. Llamamos r al radio del semicírculo pequeño (el del semicírculo grande es $R = 1$). Uniendo los centros de los dos semicírculos formamos la hipotenusa de un triángulo rectángulo. Esta hipotenusa mide $1 + r$ y los catetos miden 1 y $2 - r$. Entonces tenemos $(1 + r)^2 = 1^2 + (2 - r)^2 \Rightarrow 2r + 1 = 1 - 4r + 4$, de donde $6r = 4$ o $r = \frac{2}{3}$.

5. Llamando $5x$ y x a los minutos pasados y a los que quedan, tenemos que $(5x + m)/(x - m) = 8$, de donde $5x + m = 8x - 8m$ o $x = 3m$. Entonces, cuando han pasado $5x + 2m = 17m$ minutos quedan $x - 2m = m$ minutos, por lo que han pasados 17 veces lo minutos que quedan.

6. Sea a al cateto del triángulo rectángulo isósceles cuya hipotenusa es el doblez.



Entonces, la longitud del dobléz es $\sqrt{2}a$, y el área de este triángulo es $\frac{1}{2}a^2$. Como el área del cuadrado original es el triple del área de este triángulo tenemos

$$\frac{3a^2}{2} = 12 \Rightarrow 3a^2 = 24 \Rightarrow a^2 = 8 \Rightarrow a = 2\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2}a = 4.$$